

Zastosowanie wybranych metod bezsiatkowych w analizie przepływów w pofalowanych przewodach

Streszczenie

Jednym z podstawowych zagadnień mechaniki płynów jest analiza przepływu płynu przez przewody o dowolnym kształcie. W literaturze można znaleźć wiele przykładów tego typu analiz (np. analiza przepływu płynu przez otwarte kanały, ośrodki porowate, czy w kanałach z poruszającymi się elementami). Jednym ze szczególnych przypadków tego typu przewodów mogą być przewody pofalowane.

Zagadnienie przepływu płynu przez przewody pofalowane zainspirowane zostało zjawiskami, które można zaobserwować w przyrodzie. W obszarze tym wymienić można w szczególności przepływy występujące w ludzkim ciele: przepływ krwi przez zwężone naczynia krwionośne (arterioskleroza), przepływ krwi i limfy przez małe naczynia krwionośne, czy przepływy perystaltyczne. Tego typu przepływy występują również w technice. Dotyczy to np. urządzeń do krążenia pozaustrojowego, czy pomp perystaltycznych (często wykorzystywanych w przemyśle).

W analizie zagadnień mechaniki płynów w wielu przypadkach zastosowanie klasycznego – newtonowskiego modelu płynu bywa nieuzasadnione. W szczególności dotyczy to niektórych zagadnień występujących w przemyśle chemicznym, farmakologicznym i spożywczym, przetwórstwa tworzyw sztucznych, czy przepływów płynów ustrojowych. Z tego względu w niniejszej rozprawie w wybranych zagadnieniach rozważono również przepływy płynów nienewtonowskich.

Dokonując analizy literatury dotyczącej numerycznej symulacji przepływów przez przewody pofalowane można stwierdzić, że w szerokiej gamie zagadnień z tego zakresu stosowano klasyczne, powszechnie znane metody numeryczne. Wyróżnić można wśród nich m.in.: metodę elementów skończonych, metodę różnic skończonych, metodę elementów brzegowych, metodę objętości skończonych, czy metodę perturbacyjną.

Metody bezsiatkowe stanowią pewną alternatywę w stosunku do powszechnie stosowanych metod siatkowych, wymienionych wyżej. W pracy skupiono się na pewnej grupie metod bezsiatkowych nazywanych metodami kollokacyjnymi. W metodach tych rozwiązanie przybliżone przyjmowane jest w postaci kombinacji liniowej pewnych funkcji próbnych, a nieznane współczynniki tej kombinacji liniowej otrzymywane są przez kollokację. W zagadnieniach rozważanych w rozprawie stosuje się trzy metody z tej grupy: metodę Trefftza,

metodę rozwiązań podstawowych oraz metodę Kansy. Autorowi niniejszej rozprawy doktorskiej nie są znane prace innych autorów, w których analizy przepływów przez pofalowane przewody dokonuje się z wykorzystaniem metod bezsiatkowych.

Metoda Trefftza (ang. *Trefftz method*) została zaproponowana w 1926 r. przez Ericha Trefftza na konferencji w Zurichu. Rozwiązanie przybliżone przyjmuje postać kombinacji liniowej takich funkcji próbnych, które spełniają równanie różniczkowe opisujące rozważany problem liniowy w sposób dokładny. Jedną z odmian metody Trefftza jest metoda Trefftza w połączeniu z metodą kollokacji brzegowej (ang. *boundary collocation technique*), w której nieznanne współczynniki rozwiązania przybliżonego oblicza się przez spełnienie warunków brzegowych w skończonej liczbie punktów umieszczonych na brzegu rozważanego obszaru (zwanymi punktami kollokacji). W szczególnych przypadkach funkcje próbne w metodzie Trefftza (funkcje Trefftza) spełniają również część warunków brzegowych. Taką odmianę metody Trefftza w literaturze nazywa się metodą Trefftza z funkcjami Trefftza specjalnego przeznaczenia (ang. *Trefftz method with special purpose Trefftz functions*).

Kolejną metodą stosowaną w pracy jest metoda rozwiązań podstawowych (ang. *method of fundamental solutions*). Została ona zaproponowana w latach 60. przez gruzińskich naukowców - Victora D. Kupradze i Meraba A. Aleksidze. Polega ona na założeniu rozwiązania przybliżonego w postaci liniowej kombinacji rozwiązań podstawowych, które podobnie jak funkcje próbne w metodzie Trefftza spełniają w sposób dokładny liniowe równanie różniczkowe opisujące rozważany problem. Stąd też mówi się o tym, że metoda rozwiązań podstawowych jest pewną odmianą metody Trefftza. Rozwiązania podstawowe są funkcją odległości dowolnego punktu znajdującego się wewnątrz rozważanego obszaru od tzw. punktu źródłowego (ang. *source point*), który w celu uniknięcia osobliwości (obecnej w rozwiązaniu podstawowym) umieszcza się w pewnej odległości od rozważanego obszaru. Nieznane współczynniki rozwiązania przybliżonego również oblicza się metodą kollokacji brzegowej.

Ostatnia z metod – metoda Kansy (ang. *Kansa method* lub *global radial basis function collocation method*) jest najmłodszą metodą stosowaną w pracy. Została zaproponowana na początku lat 90. przez Edwarda J. Kansę. W metodzie rozwiązanie przybliżone przyjmowane jest w postaci liniowej kombinacji promieniowych funkcji bazowych (ang. *radial basis functions*). Metoda ta nieco różni się od dwóch wcześniej opisanych, ponieważ stosowane w niej funkcje próbne (promieniowe funkcje bazowe) nie spełniają równania różniczkowego opisującego problem. Stąd też nieznanne współczynniki rozwiązania przybliżonego obliczane są przez kollokację zarówno równania różniczkowego (w skończonej liczbie punktów znajdujących się

wewnątrz rozważanego obszaru) oraz warunków brzegowych (w skończonej liczbie punktów umieszczonych na brzegu obszaru).

W przypadku zagadnień opisanych nieliniowymi równaniami różniczkowymi w pierwszym kroku dokonuje się wyróżnienia części liniowej i nieliniowej równania. Następnie w celu uzyskania pierwszego przybliżenia rozwiązuje się zagadnienie przepływu płynu Newtona bądź przepływu Stokesa (w zależności od rozważanego problemu). W dalszych krokach stosuje się metodę iteracji Picarda, w której zagadnienie nieliniowe przekształcane jest w ciąg zagadnień niejednorodnych. W kolejnych krokach iteracyjnych niejednorodną część równania opisującego problem uzyskuje się stosując rozwiązanie z poprzedniego kroku. Rozwiązanie przybliżone w danym kroku iteracyjnym przyjmuje się jako sumę rozwiązania ogólnego oraz rozwiązania szczególnego. Rozwiązanie szczególne uzyskuje się przez interpolację części niejednorodnej promieniowymi funkcjami bazowymi (metoda wzajemności) lub metodą Kansa. Rozwiązanie ogólne uzyskiwane jest przez zastosowanie metody rozwiązań podstawowych i spełnienie warunków brzegowych.

Według najlepszej wiedzy autora rozprawy w dotychczas opublikowanej literaturze nie stosowano metod bezsiatkowych w analizie problemów przepływów płynów przez przewody pofalowane (poza kilkoma publikacjami, których autor rozprawy jest współautorem). W pracy postawiono następującą tezę: zastosowanie metod bezsiatkowych w analizie przepływu płynu przez pofalowane przewody daje efektywne wyniki. Celem pracy jest zastosowaniem opisanych wyżej metod w wybranych zagadnieniach przepływów przez pofalowane przewody.

Rozdział 1 dotyczy wprowadzenia w zagadnienie przepływów w pofalowanych przewodach. W rozdziale podano przykłady występowania takich przepływów w przyrodzie i technice. Dokonano przeglądu literatury dotyczącego numerycznej analizy przepływu płynu przez przewody pofalowane: podłużny i poprzeczny przepływ pomiędzy pofalowanymi płytami, przepływ perystaltyczny oraz przepływ w rurze pofalowanej osiowoosymetrycznej.

W rozdziale 2. omówiono podstawowe równania opisujące zagadnienia z zakresu mechaniki płynów – równanie ciągłości przepływu oraz równanie Navier–Stokesa. Zaprezentowano postać tych równań opisujących zjawiska przepływowe dla płynów newtonowskich i nienewtonowskich. Przedstawiono sformułowania z użyciem prędkości i ciśnienia oraz wirowości i funkcji prądu. W rozdziale omówiono również szczególne przypadki przepływów (przepływy Couette'a, Poiseuille'a oraz Stokesa), które w dalszej części pracy rozważone zostały w odniesieniu do przepływów przez pofalowane przewody.

Metody bezsiatkowe zastosowane w zagadnieniach rozważonych w rozprawie omówiono w rozdziale 3. Do metod tych zaliczają się: metoda Trefftza, metoda rozwiązań podstawowych oraz metoda Kansy. W rozdziale dokonano przeglądu literatury zastosowań wyżej wymienionych metod w różnych zagadnieniach mechaniki płynów.

Rozdział 4 przedstawia pierwsze z rozważanych zagadnień – przepływ przez rurę wewnętrznym pofalowaną. W pierwszej części rozdziału zaprezentowano rozważaną geometrię – przekrój poprzeczny rozważanej rury i dokonano opisu matematycznego jej wewnętrznej ścianki. Następnie zaprezentowano matematyczny opis przepływu Poiseuille'a przez taką rurę i wprowadzono zmienne bezwymiarowe. W dalszej części omówiono zastosowanie metody Trefftza, metody Trefftza z funkcjami specjalnego przeznaczenia, metody rozwiązań podstawowych oraz metody kolokacji promieniowymi funkcjami bazowymi w odniesieniu do tego zagadnienia. W rozdziale porównano wyniki otrzymane z zastosowaniem wymienionych metod i zaprezentowano wyniki w postaci wykresów bezwymiarowej prędkości średniej oraz iloczynu współczynnika strat tarcia i liczby Reynoldsa w zależności od amplitudy zafalowania oraz liczby zafalowań na obwodzie wewnętrznym rury. Drugim rozważonym przypadkiem dla tej geometrii był przepływ płynu nienewtonowskiego opisanego modelem potęgowym. Zagadnienie to opisane jest równaniem nieliniowym. Do rozwiązania tego problemu zaproponowano opisano wcześniej procedurę opartą na metodzie iteracji Picarda. Porównano wyniki otrzymane z zastosowaniem metody wzajemności oraz metody Kansy do otrzymania rozwiązania szczególnego. Przedstawiono zależność bezwymiarowej prędkości średniej oraz iloczynu współczynnika strat tarcia i liczby Reynoldsa od wykładnika potęgi modelu płynu oraz amplitudy zafalowania dla kilku przypadków liczby zafalowań na obwodzie wewnętrznym rury. Na końcu przedstawiono wnioski płynące z zastosowania metod bezsiatkowych w odniesieniu do tego zagadnienia.

Zagadnienie podłużnego przepływu pomiędzy pofalowanymi płytami przedstawione zostało w rozdziale 5. W ramach pracy rozważono przepływ typu Couette'a oraz Poiseuille'a w takim kanale. Na początku dokonano matematycznego sformułowania tych zagadnień, a następnie omówiono zastosowanie analizowanych metod dla tak sformułowanego problemu. W rozdziale porównano zastosowanie metody Trefftza, metody rozwiązań podstawowych oraz metody Kansy dla wybranych parametrów obszaru. W przypadku przepływu Couette'a przedstawiono linie jednakowej wartości prędkości dla różnych wartości przesunięć pomiędzy górną, a dolną ścianką. W przypadku przepływu Poiseuille'a wartości bezwymiarowej wartości prędkości oraz iloczynu współczynnika strat tarcia i liczby Reynoldsa zbadano dla różnych wartości amplitudy zafalowania oraz przesunięć pomiędzy pofalowanymi płytami. W rozdziale w celu rozwiązania nieliniowego problemu przepływu płynu potęgowego zastosowano również

procedurę opartą na metodzie iteracji Picarda w połączeniu z metodą rozwiązań podstawowych oraz metodą Kansy bądź metodą wzajemności. W pracy porównano zastosowanie obu metod. Dla wybranych parametrów rozważanego obszaru przedstawiono zależność bezwymiarowej prędkości średniej oraz iloczynu współczynnika strat tarcia i liczby Reynoldsa od amplitudy zafalowania i wykładnika potęgi płynu nienewtonowskiego opisanego modelem potęgowym.

Poprzeczny przepływ płynu pomiędzy pofalowanymi płytami rozważono w rozdziale 6. Problem opisano matematycznie stosując sformułowanie za pomocą ciśnienia i prędkości. W pierwszym rzędzie dokonano analizy przepływu Stokesa z zastosowaniem metody rozwiązań podstawowych oraz metody Kansy. Porównano wyniki otrzymane dla wybranych parametrów rozważanego obszaru. W ogólnym przypadku (dla liczb Reynoldsa większych od zera) równania opisujące problem przepływu w takim kanale są równaniami nieliniowymi. Stąd w pracy zaproponowano procedurę iteracyjną na rozwiązanie tego zagadnienia opartą na metodzie iteracji Picarda w połączeniu z metodą rozwiązań podstawowych oraz metodą Kansy bądź metodą wzajemności. Dla wybranych parametrów rozważanego obszaru przedstawiono otrzymane wyniki.

Rozdział 7 zawiera analizę przepływu perystaltycznego z zastosowaniem metod bezsiatkowych. Problem sformułowano stosując wirowość oraz funkcję prądu. Przepływ Stokesa rozwiązano stosując metodę rozwiązań podstawowych oraz metodę Kansy. Otrzymane w ten sposób wyniki zostały porównane. Dla zagadnienia nieliniowego (równanie Navier-Stokesa w sformułowaniu za pomocą wirowości oraz funkcji prądu) zaproponowano procedurę iteracyjną opartą – jak w poprzednich przypadkach – na metodzie iteracji Picarda.

Ostatnim rozważanym zagadnieniem był przepływ przez rurę pofalowaną osiowosymetryczną. Zastosowanie metody rozwiązań podstawowych w rozwiązaniu tego typu problemu przedstawiono w rozdziale 8. Jako rozwiązania podstawowe użyto tzw. Stokesletów (czyli rozwiązań podstawowych dla zagadnienia Stokesa) dla przepływu osiowosymetrycznego. W rozdziale porównano wpływ amplitudy zafalowania oraz długości pofalowanego przewodu na bezwymiarowy objętościowy wydatek przepływu.

Podsumowanie, wnioski oraz dalsze kierunki badań w zakresie zastosowania metod bezsiatkowych w analizie przepływów przez pofalowane przewody zawarto w rozdziale 9.